

非简并参量下转换中信号模的起伏谱*

张天才 谢常德 彭莹莹
(山西大学光电研究所, 太原 030006)

提 要

利用线性 Langevin 方程和谱矩阵, 采用全量子方法讨论了非简并参量下转换中, 腔外信号模在阈值以上和阈值以下的起伏谱, 得出在这一过程中信号模与闲置模通常处于最小测不准态.

关键词 参量下转换, 起伏谱.

1 引 言

非简并参量下转换过程是用于产生双模压缩态的重要方法, 对此已有人作了研究^[1]. 文献[2]中就光学参量振荡过程中三模之间的作用, 采用全量子方法处理并得到了耦合模的起伏谱. 尽管从双模压缩态的定义出发^[3], 可以得到信号模与闲置模自身不存在压缩, 但是到目前为止, 还没有人对非简并参量下转换中信号模本身的起伏进行讨论. 本文采用标准的量子统计方法, 利用线性化的 Langevin 方程求出腔外信号模可测正交位相分量的起伏谱. 证明信号模与闲置模处于最小测不准态, 而且在零频起伏最大. 文章使我们对非简并参量下转换产生双模压缩态的物理过程有了进一步的认识, 说明信号模与闲置模之间的量子相关与相互作用是产生光场压缩态的关键.

2 模型及其稳态解

2.1 模型及运动方程

如图 1 所示, 频率为 ω_1 的相干泵浦场入射到法布里-珀罗腔中, 与腔内非线性介质发生相互作用, 产生频率为 ω_2 和 ω_3 的两个下转换光场, 满足 $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$. 如果 $\omega_2 \neq \omega_3$, 这是一个频率非简并的参量过程; 如果 $\omega_2 = \omega_3$, 但它们的偏振互相垂直, 则是一个频率简并、偏振非简并的参量过程. 为了与频率简并、偏振非简并情况产生双模压缩态的过程比较^[2,4], 考虑后一种情况, 并令 $\omega_1 = 2\omega$, $\omega_2 = \omega_3 = \omega$. 事实上, 在不考虑腔失谐的情况下, 下面的处理对 $\omega_2 \neq \omega_3$ 同样适用.

如果不考虑腔的失谐量, 则这个系统完整的哈密顿量可以写成:

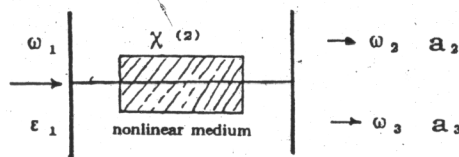


Fig. 1 Nondegenerate OPO cavity

收稿日期: 1992年7月3日; 收到修改稿日期: 1992年9月8日

* 国家自然科学基金资助项目.

$$H = H_{\text{rev}} + H_{\text{irrev}}, \quad (1)$$

$$H_{\text{rev}} = 2\hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 + \hbar\omega_3 a_3^\dagger a_3 + i\hbar k/2 \cdot (a_1 a_2^\dagger a_3^\dagger - a_1^\dagger a_2 a_3) + i\hbar\epsilon_1 [a_1^\dagger \exp(-2i\omega t) - a_1 \exp(2i\omega t)], \quad (2)$$

$$H_{\text{irrev}} = \sum_{i=1}^3 (a_i \Gamma_i^\dagger - a_i^\dagger \Gamma_i) \quad (3)$$

这里 a_i, a_i^\dagger ($i=1, 2, 3$, 1 代表泵浦模, 2, 3 分别代表信号模和闲置模) 分别是第 i 个模的消灭和产生算符. 耦合常数 k 正比于非线性晶体的二阶极化率 $\chi^{(2)}$, 并且与晶体长度及相位匹配情况有关. $\Gamma_i, \Gamma_i^\dagger$ 是第 i 个模的热浴算符, 表征了腔模的损耗. ϵ_1 正比于相干驱动场的振幅. 采用标准的量子统计方法对热库取迹, 并引入广义 P-表示^[5], 利用 $a_i \rightarrow a_i, a_i^\dagger \rightarrow a_i^\dagger$ 对应规则, 将含有 a_i, a_i^\dagger 的系统约化密度算符的主方程变成该系统的随机运动方程即 Lengvein 方程^[2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1^\dagger \\ \alpha_2 \\ \alpha_2^\dagger \\ \alpha_3 \\ \alpha_3^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - \gamma_1 \alpha_1 - \kappa \alpha_2 \alpha_3 \\ \epsilon_1 - \gamma_1 \alpha_1^\dagger - \kappa \alpha_2^\dagger \alpha_3^\dagger \\ -\gamma_2 \alpha_2 - \kappa \alpha_1 \alpha_3^\dagger \\ -\gamma_2 \alpha_2^\dagger - \kappa \alpha_1^\dagger \alpha_3 \\ -\gamma_3 \alpha_3 - \kappa \alpha_1 \alpha_2^\dagger \\ -\gamma_3 \alpha_3^\dagger - \kappa \alpha_1^\dagger \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_2 & \kappa \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2 & 0 & 0 & \kappa \alpha_1^\dagger \\ 0 & 0 & \kappa \alpha_1 & 0 & 0 & \Lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa \alpha_1^\dagger & \Lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_1^\dagger(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_2^\dagger(t) \\ \eta_3(t) \\ \eta_3^\dagger(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中, γ_i 是第 i 个模的衰退常数. n_i^{th} 是热库中频率为 ω_i 的模的热平均光子数. $\Lambda_i = 2n_i^{\text{th}} \gamma_i$. 随机起伏 $\eta_i(t)$ 和 $\eta_i^\dagger(t)$ 是 δ 关联的:

$$\left. \begin{aligned} \langle \eta_i(t) \rangle = \langle \eta_i^\dagger(t) \rangle = 0, \\ \langle \eta_i(t) \eta_j^\dagger(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t') \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

这些方程确定了一个六维复空间的概率分布. 如果将每个复变量看成一对实变量, 则它们构成了一个十二维的实空间. 原则上, 任何一个正规排列的物理量或关联函数, 能够通过这些实变量的几率分布而求得.

2.2 稳态解

首先, 考虑这个系统的半经典行为, 当忽略掉方程(4)中的随机起伏以及 α_i 的随机性以后, 可以得到场振幅 α_i 所满足的半经典运动方程. 该方程

具有下面的稳态解:

$$\begin{aligned} |\alpha_1^0| &= \epsilon_1 / \gamma_1 \\ |\alpha_2^0| &= |\alpha_3^0| = 0 \quad (\epsilon_1 < \epsilon_{11}^{\text{thres}}) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} |\alpha_1^0| &= \gamma_2 / \kappa \\ |\alpha_2^0| &= |\alpha_3^0| = \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_{11}^{\text{thres}}) / \kappa} \quad (\epsilon_1 \geq \epsilon_{11}^{\text{thres}}) \end{aligned} \quad (7)$$

其中阈值: $\epsilon_{11}^{\text{thres}} = \gamma_1 \gamma_2 / \kappa$. 为了处理方便, 已经假定了 $\gamma_2 = \gamma_3$. 稳态解表明, 只有当泵浦场的强度达到一定值时, 才可能有信号场出现. 在低于阈值时没有信号场产生, 此时信号场的平均强度为零, 但腔内非线性相互作用过程仍然存在. 正是这种相互作用改变了真空场的统计性质. 在低于阈值时腔内泵浦场随腔外驱动场增强而线性增加, 达到阈值以后不再变化, 而信号场则随驱动场的增加而增加, 直到接近腔内泵浦场的强度. 如图 2 所示.

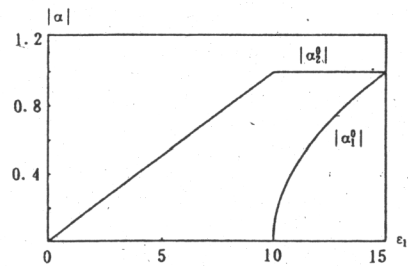


Fig. 2 The internal field as a function of driving field for $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 5$, and $\kappa = 5$

3 信号模的起伏谱

无论是 Fokker-Planck 还是 Langevin 方程,在一般情况下都是很难求解的.本文采用一级近似来处理.考虑在稳态解附近有一个很小的微扰,在一级展开下得到线性 Langevin 方程:

$$(\partial/\partial t)[\delta\bar{\alpha}] = -A[\delta\bar{\alpha}] + D^{1/2}\bar{\eta}(t) \quad (8)$$

$$\text{其中 } A = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & 0 & -\kappa\alpha_3^{0-} & 0 & -\kappa\alpha_2^{0-} & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & 0 & -\kappa\alpha_3^{0-} & 0 & -\kappa\alpha_2^{0-} \\ \kappa\alpha_3^{0-} & 0 & -\gamma_2 & 0 & 0 & \kappa\alpha_1^{0-} \\ 0 & \kappa\alpha_3^{0-} & 0 & -\gamma_2 & \kappa\alpha_1^{0-} & 0 \\ \kappa\alpha_2^{0-} & 0 & 0 & \kappa\alpha_1^{0-} & -\gamma_2 & 0 \\ 0 & \kappa\alpha_2^{0-} & \kappa\alpha_1^{0-} & 0 & 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2\gamma_1 n_1^{\text{th}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\gamma_1 n_1^{\text{th}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma_2 n_2^{\text{th}} & \kappa\alpha_1^0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma_2 n_2^{\text{th}} & 0 & 0 & \kappa\alpha_1^{0-} \\ 0 & 0 & \kappa\alpha_1^0 & 0 & 0 & 2\gamma_2 n_2^{\text{th}} \\ 0 & 0 & 0 & \kappa\alpha_1^{0-} & 2\gamma_2 n_2^{\text{th}} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$[\delta\bar{\alpha}] = \begin{pmatrix} \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_1^+ \\ \delta\alpha_2 \\ \sigma\alpha_2^+ \\ \delta\alpha_3 \\ \delta\alpha_3^+ \end{pmatrix}, \quad [\bar{\eta}(t)] = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_1^+(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_2^+(t) \\ \eta_3(t) \\ \eta_3^+(t) \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中 A 就是通常所说的漂移矩阵; D 为扩散矩阵.谱矩阵 $S(\nu)$ 定义为正规排列的双时关联函数所构成的关联矩阵的傅里叶变换.双时关联函数可以通过漂移矩阵和扩散矩阵求得.谱矩阵 $S(\nu)$ 与 A, D 之间有如下关系^[6]:

$$S(\nu) \equiv (A + i\nu I)^{-1} D (A^T - i\nu I)^{-1} \quad (12)$$

这里 I 为单位矩阵, T 代表矩阵的转置.

为了研究信号场自身的起伏,需要计算信号场正交可测量量 x_+ 和 x_- 的起伏;令 $a_2 = x_+ + ix_-$, 有

$$x_+ = (a_2 + a_2^+)/2, \quad x_- = (a_2 - a_2^+)/2i \quad (13)$$

于是腔内 a_2 模正交分量的起伏谱为:

$$S_{\pm}(\nu) = \langle :x_{\pm}(\nu), x_{\pm}: \rangle \quad (14)$$

利用文献[7]所给出的单端腔的输出场与腔内场的关系,可以求出腔外信号模 a_2 的起伏谱为

$$S_{\pm}^{\text{out}}(\nu) = \langle :x_{\pm}^{\text{out}}(\nu), x_{\pm}^{\text{out}}: \rangle = \gamma_2 [\pm S_{33}(\nu) + S_{34}(\nu) + S_{43}(\nu) \pm S_{44}(\nu)]/2 \quad (15)$$

S_{ij} 代表谱矩阵(12)式中的矩阵元.

考虑到在常温下热平均光子数 $n_i^{\text{th}} = [\exp(\hbar\omega/kT) - 1]^{-1} \ll 1$, 扩散矩阵 D 中 $2\gamma_1 n_1^{\text{th}}$ 项一般

比 $\kappa\alpha_i$ 项小得多(此项的量级为 γ_2). 因此忽略掉扩散矩阵中的 $\gamma_2\alpha_i^4$ 项, 在这种情况下得到, 在低于阈值时:

$$S_{33}(v) = S_{44}(v) = 0$$

$$S_{34}(v) = S_{43}(v) = \frac{2\kappa^2\alpha_1^2\gamma_2}{[(\gamma_1^2 + \kappa^2\alpha_1^2 + v^2) - 4\kappa^2\alpha_1^2\gamma_2^2]}$$

于是低于阈值时的起伏谱为:

$$S_{\pm}^{\text{out}}(v) = \frac{(\gamma_2\varepsilon_1\kappa/\gamma_1)^2}{[\gamma_1^2 + (\kappa\varepsilon_1/\gamma_1)^2 + v^2]^2 - 4(\gamma_2\varepsilon_1\kappa/\gamma_1)^2} \quad (16)$$

同样可以得到高于阈值时的起伏谱为:

$$S_{\pm}^{\text{out}}(v) = \frac{2\kappa\alpha_1^0\gamma_2[A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2]}{R^2 + I^2} \quad (17)$$

$$A_1 = \kappa\alpha_1^0[(\gamma_1^2 - v^2)(\gamma_2^2 - v^2) - 4\gamma_1\gamma_2v^2] + 2\kappa^3\alpha_1^0\alpha_2^2(\gamma_1\gamma_2 - v^2) - \kappa^3\alpha_1^0\alpha_2^3(\gamma_1^2 - v^2) + 2\kappa^5\alpha_1^0\alpha_2^4 \quad (18)$$

$$B_1 = 2\kappa\alpha_1^0v[\gamma_2(\gamma_1^2 - v^2) + \gamma_1(\gamma_2^2 - v^2)] + 2\kappa^3\alpha_1^0\alpha_2^2(\gamma_1 + \gamma_2)v - 2\kappa^3\alpha_1^0\alpha_2^3\gamma_1v \quad (19)$$

$$A_2 = (\gamma_1^2 - v^2)(\gamma_2^2 - 3\gamma_2v^2) - 2\gamma_1v^2(3\gamma_2^2 - v^2) + 3\kappa^2\alpha_2^2[\gamma_1(\gamma_2^2 - v^2) - 2\gamma_2v^2] + 2\kappa^4\gamma_2\alpha_2^4 - \kappa^4\gamma_1\alpha_1^2\alpha_2^2 - \kappa^2\alpha_1^2[(\gamma_2(\gamma_1^2 - v^2) - 2\gamma_1v^2)] \quad (20)$$

$$B_2 = (\gamma_1^2 - v^2)(3\gamma_2^2v - v^3) + 2\gamma_1v(\gamma_2^2 - 3\gamma_2v^2) + 3\kappa^2\alpha_2^2[2\gamma_1\gamma_2v + v(\gamma_2^2 - v^2)] + 2\kappa^4\alpha_2^4v - \kappa^4\alpha_1^2\alpha_2^2v - \kappa^2\alpha_1^2[(\gamma_1^2 - v^2)v + 2\gamma_1\gamma_2v] \quad (21)$$

$$R = \gamma_1^2\gamma_2^2 - 4\gamma_2^2\gamma_1^2v^2 - 8\gamma_1\gamma_2v^2\gamma_2^2 - 2\kappa^2\alpha_1^2(\gamma_1\gamma_2 - v^2)^2 + 2\kappa^2\alpha_1^2(\gamma_1 + \gamma_2)^2v^2 + 4\kappa^2\alpha_2^2[\gamma_1(\gamma_2^2 - 3\gamma_2v^2) - v^2(3\gamma_2^2 - v^2)] + 4\kappa^4\alpha_2^4\gamma_2^2 - 4\kappa^4\alpha_1^2\alpha_2^2(\gamma_1\gamma_2 - v^2) + \kappa^4\alpha_1^4\gamma_1 - 4\kappa^6\alpha_1^2\alpha_2^4 \quad (22)$$

$$I = 4\gamma_1\gamma_2^2\gamma_2v + 2\gamma_1v(\gamma_2^2 - 4\gamma_2^2v^2) - 4\kappa^2\alpha_1^2v(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1\gamma_2 - v^2) + 4\kappa^2\alpha_2^2(3\gamma_1\gamma_2^2 - \gamma_1v^2 + \gamma_2^2 - 3\gamma_2v^2)v + 8\kappa^4\alpha_2^4\gamma_2v - 4\kappa^4\alpha_1^2\alpha_2^2(\gamma_1 + \gamma_2)v + 2\kappa^4\alpha_1^4\gamma_1v \quad (23)$$

这里 $\gamma_{11} = \gamma_1^2 - v^2$; $\gamma_{22} = \gamma_2^2 - v^2$, α_1^0 和 α_2^0 由(6),(7)式给出.

图 3 是低于阈值时信号模一可测正交分量的起伏谱(此时两正交可测分量的起伏相同). 从图中可以看出, $0 < S \ll 1$, 而 $S = 0$ 对应于相干态. 也就是说, 在低于阈值时, 信号模的起伏是非常接近于相干态的起伏. 从图中看出, S 随频率的变化很缓慢, 在零频附近起伏最大.

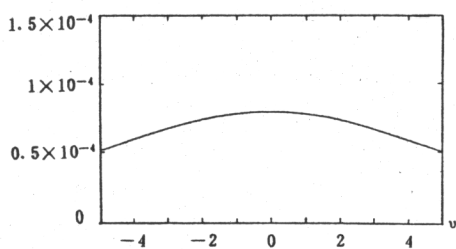


Fig. 3 The fluctuation spectrum of the signal mode below the threshold for $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 1$, $\kappa = 5$ and $\varepsilon_1 = 1.8$

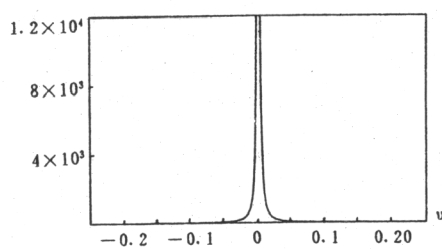


Fig. 4 The fluctuation spectrum of the signal mode above the threshold for $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 1$, $\kappa = 5$ and $\varepsilon_1 = 2.15$

图 4 是高于阈值时信号场 a_2 的正交可测分量的起伏谱. S 仍然大于 0, 显然, 在零频以外的地方, 信号模处于相干态噪声, 在零频处的噪声最大.

总之, 不论是在何种情况下, a_2 模本身是不可能出现压缩. 这个结论与一般双模压缩态的

讨论一致. 发现在 $\nu = 0$ 时起伏反而最大, 这一点与耦合模截然不同^[2]. 正如文献[3] 在讨论双模压缩态时所指出的, 双模中的任意一模均不存在压缩, 其起伏与热噪声的起伏一致, 而热噪声的起伏在零频时最大. 本文的讨论与此是一致的. 正因为这种来自泵浦场的热噪声的起伏在零频时最大, 在探测压缩态的实验中要避免零频噪声而选择在几兆以上进行探测. 对于闲置波 a_3 来说, 计算表明它与 a_2 完全相同. 事实上当 $\nu_2 = \nu_3$ 时, 这两个模完全对称的.

4 结 论

本文采用全量子的方法讨论了非简并光学参量谐振腔中泵浦模与信号模及闲置模之间的相互作用, 利用线性 Langevin 方程得到了信号模可测正交位相分量的起伏谱. 在通常情况下腔外信号模与闲置模处于相干态即最小测不准态, 在零频附近起伏最大, 呈热噪声谱的特点.

参 考 文 献

- [1] S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino, Quantum fluctuations in a two-mode parametric oscillator. *J. Opt. Soc. Am.*, B, 1987, 4(10): 1520~1523
- [2] Zhang Tiancai, Xie Changde, Peng Kunchi, The full quantum theory on the three-mode interactions inside an OPO cavity. *Acta Physica Sinica (Overseas Edition)*, 1992, 1(1): 94~103
- [3] S. M. Barnett, P. L. Knight, Squeezing in correlated quantum systems. *J. of Mod. Opt.*, 1987, 34(6): 841~853
- [4] S. F. Pereira, K. C. Peng, H. J. Kimble; Edited by J. H. Eberly, L. Mandel, E. Wolf, Squeezed state generation and nonclassical correlations in nondegenerate parametric down conversion. in *Coherence and Quantum Optics VI*. Rochester, New York; Plenum Press, N. Y. 1990: 889~890
- [5] P. D. Drummond, C. W. Gardiner, Generalized P-representations in quantum optics. *J. Phys. (A)*, 1980, 13: 2353~2368
- [6] S. Chaturvedi, P. Drummond, D. F. Walls, Two photon absorption with coherent and partially coherent driving fields. *J. Stat. Phys.*, 1977, 10(11): 187~192
- [7] C. W. Gardiner, M. J. Collett, Input and output in damped quantum systems: quantum stochastic differential equations and the master equation. *Phys. Rev. (A)*, 1985, 31(6): 3761~3774

The fluctuation spectra of signal mode in non-degenerate parametric down-conversion

ZHANG Tiancai XIE Changde PENG Kunchi

(Institute of Opto-Electronic Researches, Shaxi University, Taiqian 030006)

(Received 3 July 1992; revised 8 September 1992)

Abstract

Using the linearized Langevin equations and the spectral matrix, we discuss the fluctuation spectra of signal mode in the output field from a F-P cavity below or above threshold for the process of non-degenerate parametric down-conversion. It is indicated that the signal and idler modes usually are in minimum-uncertainty states.

Key words parametric down-conversion, fluctuation spectrum.